https://saf.petrsu.ru
ISSN 2500-140X

https://petrsu.ru

Студенческий научный электронный журнал

StudArctic Forum

2022. Т. 7, № 2

Издатель
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
185910, Россия, Республика Карелия, г. Петрозаводск, ул. Ленина, 33.

Адрес редакции журнала
185910, Республика Карелия,
г. Петрозаводск, ул. Ленина, 33.
E-mail: saf@petrsu.ru

https://saf.petrsu.ru

https://saf.petrsu.ru
ISSN 2500-140X

https://petrsu.ru

Scientific journal

StudArctic Forum

2022. Vol. 7, No. 2

Publisher
© Petrozavodsk State University, 2022

Editorial office address
Petrozavodsk State University
33, Lenin Ave., Petrozavodsk,
185910, Russian Federation
E-mail: saf@petrsu.ru

http://saf.petrsu.ru

Математика и механика

Т. 7, № 2. С. 60—66
Научная статья
УДК 519.834

ДРОБНАЯ Полина Васильевна — бакалавриат, Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск, Российская Федерация), *severnayapol@mail.ru*

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ КООПЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАССАЖИРОПОТОКА НА ГРАФЕ

Научный руководитель:
Дорофеева Юлия Александровна
Статья поступила: 13.04.2022;
Принята к публикации: 14.04.2022;
Размещена в сети: 22.06.2022.

Аннотация. В рамках данной статьи рассматривается применение теоретико-игрового подхода для поиска оптимального распределения перевозок в том случае, когда перевозчики являются соперниками. Особенностью работы является практическое применение теории кооперативных игр для работы с реальными данными. В сценарии рассматривается фрагмент конкретной транспортной сети, а именно район г. Апатиты, Мурманской области.
Наличие конкуренции между фирмами-владельцами маршрутных автобусов, с одной стороны, а также потребность пассажиров в передвижении по городу в определенный промежуток времени от некоторого начального пункта до конечного, с другой стороны, обеспечивают актуальность данной задачи. Теоретико-игровой подход позволяет относительно легко гарантировать поиск результирующего вектора значений, компонентами которого являются оптимальные распределительные величины нагрузки для каждого игрока при условии раздела общего выигрыша.
Ключевые слова: теория игр, кооперативные игры, ориентированный граф, C – ядро, вектор Шепли, максимальный поток

Для цитирования: Дробная П. В. Применение теоретико-игровых кооперативных методов для решения прикладной задачи распределения пассажиропотока на графе // StudArctic Forum. 2022. Т. 7, № 2. С. 60—66.

Введение. Актуальность разрешения конфликтов на транспортных сетях является одной из наиболее важных задач инфраструктуры различных населенных пунктов. Использование теоретико-игрового подхода для данного класса задач обусловлено следующими факторами:

- наличие конфликта между сторонами;
- дефицит информации о стратегиях конкурентов;
- увеличение “выгоды” в случае создания коалиции между игроками.

Нахождение эффективных путей поиска оптимального распределения выигрыша для каждой стороны конфликта, с учетом всех вышеперечисленных факторов, позволяет использовать математический аппарат теории игр для успешного разрешения конфликтов.

Универсальность методов теории кооперативных игр позволяет задействовать их в различных конфликтных ситуациях. Так, в статье [Мовсесян] предметом исследования выступает транспортная сеть. Автор предлагает наиболее оптимальный способ дележа издержек между участниками. Математическим аппаратом в этой экономической постановке выступает теория кооперативных игр.

Исследование [Петросян] посвящено сетевой игре, в которой N игроков пытаются попасть в определенную точку сети. Данная постановка задачи является оптимизационной, так как затраты игроков минимизируются.

Несмотря на сложность, вызванную тем, что траектории игроков не должны пересекаться (не имеют общих дуг), найдено множество равновесных состояний, в котором и достигается минимум расходов на перемещение в нужный пункт.

При решении задач, связанных с транспортным конфликтом, не всегда применяются теоретико-игровые методы. Например, в исследовании [The applicability] представлены подходы к решению транспортных проблем. Базой являются игры Штакельберга. Они некооперативные, однако являются своего рода инструментом для принятия решений в конфликтной ситуации, заданной на транспортном узле.

Авторы в работе [The Optimization] в качестве модели исследования рассматривают транспортную сеть г. Пекин. Учитывая взаимосвязи между районами города, транспортной структурой, инфраструктурой и другими факторами, авторы выдвигают предположение по оптимизации транспортного узла.

В предложенной статье также предлагается исследование части транспортного узла населенного пункта с учетом конкуренции перевозчиков.

Предмет исследования — модель ориентированного взвешенного графа, представляющего собой транспортную сеть района города Апатиты, Мурманская область. Вес каждой дуги представляет собой максимальный поток пассажиров транспортного средства, которое может осуществить перевозку по данному элементу пути. В конфликте участвуют три игрока (три автомобильные компании), перед каждым из которых стоит задача перевести наибольшее число пассажиров из начального пункта в конечный.

Объектом исследования является теоретико-игровые методы.

Целью работы является исследование конкретного транспортного узла для нахождения оптимального результирующего вектора, компонентом которого является наиболее выгодное распределение пассажиропотока для каждого перевозчика (конкурента) с использованием методов из теории кооперативных игр.

Задачи:

1. Построить модель графа по существующему району города Апатиты.
2. Написать программу на языке C++, позволяющую автоматизировать получение основных характеристик.
3. Найти векторы, определяющие C – ядро.
4. Получить значения вектора Шепли.
5. Проанализировать полученные результаты.

Постановка задачи. На рис. 1 представлен транспортный узел, являющийся частью транспортной сети г. Апатиты, Мурманской области.

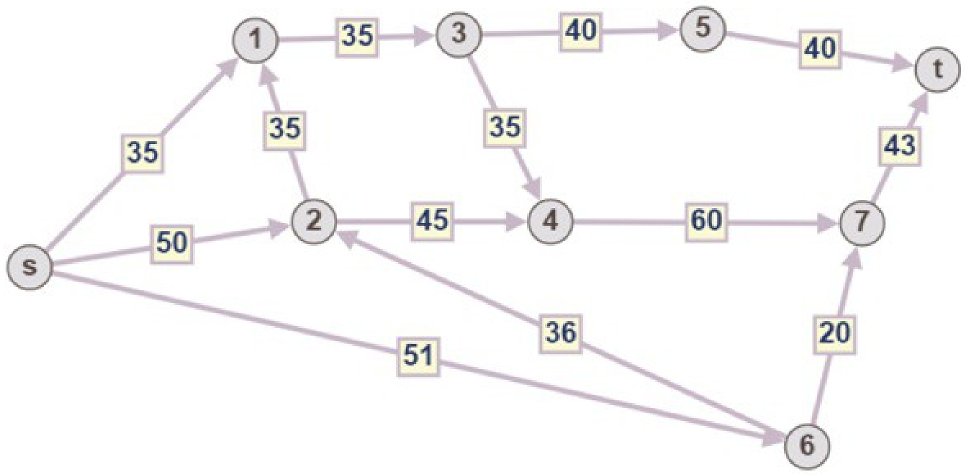

Рис.1. Граф транспортного узла г. Апатиты

На этой развязке действуют три конкурирующих перевозчика, представляющие множество игроков V = (1, 2, 3). Вершинами обозначены остановки, дуги — это участки дорог, соединяющие их, веса дуг — это максимальный пассажиропоток на данной части транспортной сети. Между перевозчиками пути распределяются следующим образом:

I = {(s, 1), (2, 4), (4, 7), (7, t)}, II = {(s, 6), (3, 4), (6, 7), (1, 3)},

III = {(s, 2), (6, 2), (2, 1), (3, 5), (5, t)}.

Значения характеристической функции для любой коалиции по отдельно взятому конкуренту принимают нулевые значения, так как ни одному игроку-конкуренту не принадлежит последовательный набор дуг, чтобы он смог добраться от начальной до конечной вершины.

Далее были рассмотрены коалиции конкурентов по два, и выписаны все доступные им пути. Коалицию первых двух v (1, 2) определяют следующие пути:

(s, 1)→(1, 3)→(3, 4)→(4, 7)→(7, t);

(s, 6) → (6, 7)→(7, t).

Соответственно для первого и третьего и второго и третьего:

v(1, 3): (s, 2)→(2, 4)→(4, 7)→(7, t). v(2, 3):

(s, 6)→(6, 2)→(2, 1)→(1, 3)→(3, 5)→(5, 7);

(s, 2) →(2, 1)→(1, 3)→(3, 5)→(5, 7).

Для нахождения значений характеристической функции коалиций по паре перевозчиков был использован алгоритм поиска максимального потока на ориентированном взвешенном графе. Таким образом, исходный граф преобразуется в подграф для коалиции ⟨1, 2⟩, изображенный на рисунке 2.

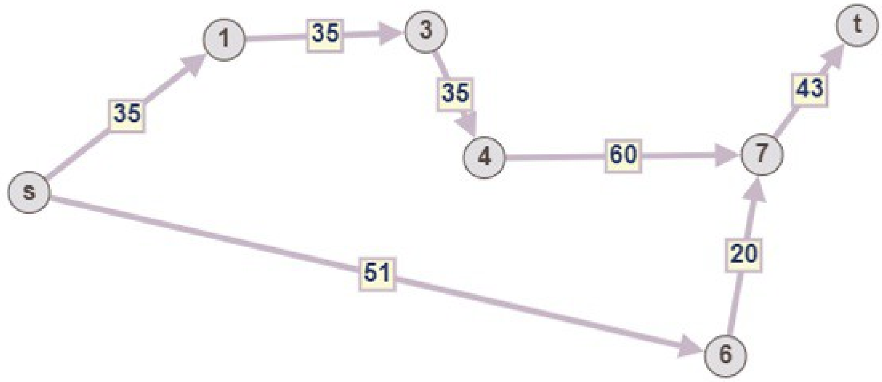

Рис. 2. Преобразованный граф транспортной развязки для объединения игроков 1 и 2.

Согласно алгоритму Форда-Фалкерсона, определяется характеристическая функция: (s, 1)→(1, 3)→(3, 4)→(4, 7)→(7, t)

a1 = min {35, 35, 35, 60, 43} = 35 (s, 6)→(6, 7)→(7, t)

a2 = min {51, 20, 8} = 8 a1+a2 = 35+8 = 43

Следовательно, v(1, 2) = 43. Это означает, что коалиция первого и второго дают выигрыш больший, чем они могли бы получить в случае, если бы перевозили пассажиров без объединения усилий.

Для игроков коалиции ⟨1, 3⟩ возможен лишь один путь, поэтому v(1, 3) = min {50, 45, 60, 43} = 43.

На рисунке 3 изображен преобразованный исходный граф, определяющий пути коалиции ⟨2, 3⟩.

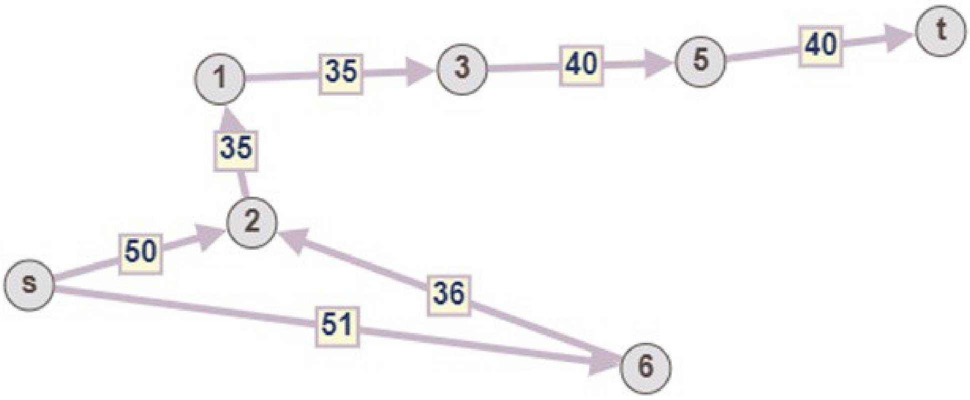

Рис. 3. Преобразованный граф транспортной развязки для объединения игроков 2 и 3.

Определим характеристическую функцию: (s, 6)→(6, 2)→(2, 1)→(1, 3)→(3, 5)→(5, t)

a1 = min {51, 36, 35, 35, 40, 40} = 35

Больше путей нет, так как вес дуги в пути до итоговой вершины принимает нулевое значение. Наконец, рассмотрим коалицию ⟨1, 2, 3⟩, которая определена на всем графе: (s, 1)→(1, 3)→(3, 5)→(5, t)

a1 = min {35, 35, 40, 40} = 35 (s, 2)→(2, 4)→(4, 7)→(7, t)

a2 = min {50, 45, 60, 43} = 43 a1+a2 = 35+43 = 78

Таким образом, была получена система, определяющая выигрыши рассматриваемой кооперативной игры.

$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0, \\ v(1,\ 2) = 43, \\ v(1,\ 3) = 43, \\ v(2,\ 3) = 35, \\ v(1,\ 2,\ 3) = 78. \end{cases}$$

Вектор a=(a1, a2, a3) – вектор неизвестных, представляющий оптимальное распределение количества человек в пассажиропотоке на всех игроков в условиях конкуренции.

До этапа вычисления векторов С–ядра необходимо осуществить его проверку на пустоту.

При проверке пустоты ядра была использована теорема Бондаревой–Шепли [2], согласно которой для игры трех лиц С–ядро не пусто тогда и только тогда, когда:

v(N) ≥ max {v[1]+v[2]+v[3];

v[1]+v[2,3]; v[2]+v[1,3]; v[3]+v[1,2];

1/2(v[1,2]+v[1,3]+v[2,3])}.

Действительно, 78 ≥ max {0; 43; 43; 35; 60.5}.

Для того, чтобы некоторый дележ a принадлежал С–ядру, необходимо и достаточно соблюдение следующих условий для каждого элемента результирующего вектора:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 78, \\ a_1 + a_2 \geq 43, \\ a_1 + a_3 \geq 43, \\ a_2 + a_3 \geq 35, \\ a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ a_3 \geq 0. \end{cases}$$

Преобразуя систему, получим ограничения значений дележа сверху и снизу:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq a_1 \leq v(1, 2, 3) - v(2, 3) = 78 - 35 = 43, \\ 0 \leq a_2 \leq v(1, 2, 3) - v(1, 3) = 78 - 43 = 35, \\ 0 \leq a_3 \leq v(1, 2, 3) - v(1, 2) = 78 - 43 = 35. \end{cases}$$

Для представления С–ядра в геометрической интерпретации необходимо определить вершины. Были составлены и решены следующие системы:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 78, \\ a_1 + a_2 = 43, \\ a_1 + a_3 = 43. \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 78, \\ a_1 + a_2 = 43, \\ a_2 + a_3 = 35. \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 78, \\ a_1 + a_3 = 43, \\ a_2 + a_3 = 35. \end{cases}$$

Решения имеют вид: (8, 35, 35), (43, 0, 35), (43, 35, 0). Вектор Шепли определяется следующим образом [2]: φ_i (v) = ∑ (k - 1)!(n - k)!/n! (v(K) - v(K - i))

В результате решения найдены следующие компоненты вектора Шепли:

$$\varphi_1(v) = \frac{1}{3}\cdot(78 - 35) + \frac{1}{6}\cdot(43 - 0) + \frac{1}{6}\cdot(43 - 0) + \frac{1}{6}\cdot(0 - 0) = \frac{86}{3}$$

$$\varphi_2(v) = \frac{1}{3}\cdot(78 - 43) + \frac{1}{6}\cdot(43 - 0) + \frac{1}{6}\cdot(35 - 0) + \frac{1}{6}\cdot(0 - 0) = \frac{74}{3}$$

$$\varphi_3(v) = \frac{1}{3}\cdot(78 - 43) + \frac{1}{6}\cdot(43 - 0) + \frac{1}{6}\cdot(35 - 0) + \frac{1}{6}\cdot(0 - 0) = \frac{74}{3}$$

Вектор Шепли имеет вид:

$$\left(\frac{86}{3}, \frac{74}{3}, \frac{74}{3}\right)$$

Таким образом, объединение всех трех перевозчиков является наиболее «выгодным» с точки зрения перевозки пассажиров, а значит - и получения прибыли.

Выводы. Результаты исследовательской работы позволяют сделать ряд выводов.

Применение такого математического аппарата, как кооперативная теория игр, позволяет значительно упростить вычислительный этап разрешения транспортного конфликта.

Для конкретного графа, который был построен для транспортной развязки г. Апатиты, построена модель ориентированного взвешенного графа для рассматриваемого конфликта, а также вычислены вектора, определяющие С – ядро, и найдены значения вектора Шепли.

Полученные характеристики, а именно С–ядро – точный процесс вычисления множества недоминируемых дележей, а также вектор Шепли позволяют определить оптимальный результирующий вектор выигрыша игроков в кооперативной игре.

Применение теоретико-игрового подхода при решении конкретной транспортной конфликтной задачи вполне приемлемо, так как полученные результаты не противоречат постановке задачи и логике процесса.

Всем перевозчикам, задействованным на данном транспортном узле, гораздо выгоднее сотрудничать вместе, действуя на правах одной коалиции, состоящей из всех участников.

Объединение перевозчиков позволит увеличить их прибыль в процессе.

Важно подчеркнуть, что все полученные данные были результатом работы программы, написанной на языке программирования C++. Полученные в ходе исследования данные в перспективе могут оказаться хорошей отправной точкой для автоматизации поиска решений различных конфликтов в транспортных задачах. Применяя изученные материалы, можно рассматривать сценарии на более крупных инфраструктурных развязках с использованием большего числа входных данных, влияющих на исход игры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бондарева О. Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // Проблемы кибернетики. 1963. № 10. С. 119—139.

Мовсесян В. А. Теоретико-игровой подход распределения затрат между участниками транспортной сети // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире. 2015. № 10. С. 80—85.

Петросян Л. А. Одна транспортная теоретико-игровая модель на сети // МТИП. 2011. № 3(4). С. 89—98.

The applicability of non-cooperative game theory in transport analysis / Y. Hollander, J. Prasher // Transportation. 2006. № 33. P. 481—496.

The Optimization and Adjustment of Passenger Transport Hub Based on the Urban Spatial Evolution / W. Qiao, Z. Zhang, C. He [etc] // 17th COTA International Conference on Transportation Professionals. 2018. P. 3177—3184.

Original article

Polina V. DROBNAYA	bachelor's degree, Petrozavodsk State University (Petrozavodsk, Russian Federation), *severnayapol@mail.ru*

APPLICATION OF GAME-THEORETIC COOPERATIVE METHODS FOR SOLVING THE APPLIED PROBLEM OF PASSENGER TRAFFIC DISTRIBUTION ON THE GRAPH

Scientific adviser:
Julia A. Dorofeeva
Paper submitted on: 04/13/2022;
Accepted on: 04/14/2022;
Published online on: 06/22/2022.

Abstract. Within the framework of this article, the application of a game-theoretic approach is considered to find the optimal distribution of transportation in the case when carriers are rivals. A feature of the work is the practical application of the theory of cooperative games to work with real data. In this scenario, a fragment of a specific transport network is considered, namely the area of Apatity, Murmansk region.
The presence of competition between firms-owners of shuttle buses, on the one hand, as well as the need for passengers to move around the city in a certain period of time from a certain starting point to the end, on the other hand, ensures the relevance of this task. The game-theoretic approach makes it relatively easy to search for the resulting vector of values, the components of which are the optimal distributive load values for each player, provided that the total winnings are divided.
Keywords: game theory, cooperative games, oriented graph, C – kernel, shapley vector, maximum flow

For citation: Drobnaya P. V. Application of game-theoretic cooperative methods for solving the applied problem of passenger traffic distribution on the graph. *StudArctic Forum*. 2022; 7(2): 60—66.

REFERENCES

Applicability of non-cooperative game theory in transport analysis / Y. Hollander, J. Prasher // Transport. 2006. No. 33. P. 481—496.

Bondareva O. N. Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games // Problems of Cybernetics. 1963. No. 10. P. 119—139.

Movsesyan V. A. A game-theoretic approach to the distribution of costs between participants of the transport network // Fundamental and applied research in the modern world. 2015. No. 10. P. 80—85.

Optimization and correction of a Passenger transport hub based on the spatial evolution of cities / W. Qiao, Z. Zhang, K. He [et al.] // 17th International CORBA Conference for Professionals in the field of transport. 2018. P. 3177—3184.

Petrosyan L. A. One transport game-theoretic model on the network // MTIP. 2011. No. 3(4). p. 89—98.