Издатель
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Российская Федерация, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33

Студенческий научный электронный журнал

StudArctic Forum

http://saf.petrsu.ru

XX / 2018

ISSN 2500-140X

Адрес редакции
185910, Республика Карелия, г. Петрозаводск, ул. Ленина, 33.
E-mail:saf@petrsu.ru
http://saf.petrsu.ru

Студенческий научный электронный журнал
StudArctic Forum
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
http://saf.petrsu.ru http://petrsu.ru

Математика и механика

Нормированные решётки измеримых функций и порядковые свойства нормы

САМУСЕНКО Тимур Александрович
магистратура, Петрозаводский государственный университет (пр. Ленина, 33),
timur.a.samusenko@gmail.com

Ключевые слова:
порядковые свойства нормы
измеримые функции

Аннотация: Статья «Нормированные решетки измеримых функций и порядковые свойства нормы» посвящена некоторым вопросам о свойствах нормы в нормированных пространствах измеримых функций.

Основной текст

Данная работа посвящена некоторым вопросам о своиствах нормы в нормированных пространствах измеримых функции и является продолжением выпускнои работы автора на степень бакалавра.

Приведены условия (A) (порядковая непрерывность нормы), (B) (монотонная полнота нормы), (C) (порядковая полунепрерывность нормы), которыми норма в нормированном идеальном пространстве (НИП) измеримых функции может обладать, а может не обладать. Суть этих условии навеяна утверждениями из теорем Леви, Фату, Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Здесь же приведены примеры пространств, демонстрирующих, что эти условия независимы друг от друга.

В статье рассматриваются условия (C_λ), (C^*), более слабые, чем условие (C). Здесь также получена связь между условиями (C_λ) при различных λ и приведен пример НИП, в котором не выполняется условие (C^*).

Приведены и доказаны утверждения, что условие (D) и диагональное условие (D^2) эквивалентны условию (B) (своиство Фату монотоннои полноты нормы).

Предварительные сведения и терминология

В терминологии и обозначениях из теории нормированных пространств измеримых функции мы будем придерживаться терминологии и обозначении, принятых в монографии [1].

Пусть (T,Σ,μ) — пространство с мерои. Здесь T — множество; Σ — σ-алгебра его подмножеств; μ — полная σ-конечная мера на Σ (σ-конечность меры означает, что существует представление $T = \bigcup_{1}^{\infty} T_n \ (T_n \in \Sigma)$ такое, что $\mu(T_n) < \infty$, а полнота μ означает, что A ⊂ B ∈ Σ, μ(B) = 0 следует A ∈ Σ и, следовательно, μ(A) = 0).

Через S = S(T, Σ, μ) обозначается множество всех, почти всюду (п.в.) конечных измеримых функции на T. Эквивалентные функции, то есть совпадающие почти всюду на T , будем отождествлять. Если x ∈ S (x — класс эквивалентных между собои функции), то через x(t) будем обозначать любую функцию из класса x, причем можно считать, что x(t) конечна для любого t.

Элементы x,y ∈ S называются дизъюнктными (обозначение: xdy), если x(t)·y(t) = 0 п.в. Для последовательности x_n ∈ X (n = 1, 2, . . .) по определению полагают (sup x_n)(t) = sup x_n(t), t ∈ T . n

В S можно ввести частичныи порядок, полагая для x,y ∈ S, по определению x ⩽ y, если x(t) ⩽ y(t) п.в.

Пусть x_n,x ∈ S(1, 2, . . .). Говорят, что:

1) x_n возрастает (x_n ↑), если $x_{n+1} \geqslant x_n$, ∀n;

2) x_n возрастает вбок (x_n ↑_), если x_n ↑ и ($x_{n+1} - x_n$)dxn;

3) x_n возрастает к x (x_n ↑ x), если x_n ↑ и x_n(t) → x(t) п.в.;

4) x_n возрастает вбок к x (x_n ↑_ x), если x_n возрастает вбок и x_n ↑ x.

Аналогично определяются последовательности {x_n} убывающие (x_n ↓), убывающие вбок (x_n ↓_), убывающие к x (x_n ↓ x), убывающие вбок к x (x_n ↓_ x)

Для x ∈ S модуль |x| определяется по формуле: |x|(t) = |x(t)|.

Идеальным пространством (ИП) на (T,Σ,μ) называется подмножество X ⊂ S, такое, что:

1) X — линеино (x, y ∈ X → αx + βy ∈ X);

2)(x∈X, y∈S, |y|⩽|x|)⇒y∈X.

Возрастающая последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ в ИП X называется порядково ограниченнои сверху в X (ограниченнои по упорядочению), если ∃y ∈ X, такои, что x ≤ y для всех n ∈ N. Если возрастающая последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ не ограченна в X, то пишут x_n ↑ +∞. Норма ||·|| на ИП X называется монотоннои, если ∀x, y ∈ X, |x| ⩽ |y|⇒||x|| ⩽ ||y||. В частности, |||x||| = |x|. Нормированным идеальным пространством (НИП) на (T,Σ,μ) называется ИП, снабженное монотоннои нормои. Полное по норме НИП называется банаховым идеальным пространством (БИП).

Хорошо известны следующие классические теоремы из математического анализа о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (см., например, [1]).

Теорема 1 (Леви) *Если x_n ∈S, x_n(t)⩾0 и x_n ↑x, то*

$$\lim \int_T x_n d\mu = \int_T x_n d\mu \ .$$

Теорема 2 (Фату) *Если $x_n \in S$, $x(t) \geqslant 0$ и $x_n(t) \to x(t)$ п.в., то*

$$\int_T x d\mu \leqslant \sup_n \lim \int_T x_n d\mu \ .$$

Теорема 3 (Лебег) *Пусть*

1) $xn(t) \to x(t)$ п.в. на T;

2) ∃ суммируемая функция y такая, что $|xn(t)| \leqslant y(y)$ п.в. Тогда x — суммируема и

$$\lim \int_T x_n d\mu = \int_T x d\mu \ .$$

Порядковые своиства нормы

Монотонная норма в НИП может обладать различными порядковыми своиствами (см., например, [1], [2], [3]).

Следующие три условия, налагаемые на произвольную норму в НИП X, являются перефразировкои вышеуказанных теорем Леви, Фату и Лебега с формальнои заменои интеграла (норма в пространстве L^1) нормои в X.

Пусть $(X, ||\cdot||)$ — НИП на (T, Σ, μ). Говорят, что

1) норма в X (порядково) непрерывна, если выполнено условие (A): из $X \ni x_n \downarrow 0$ следует $||x_n|| \to 0$;

2) норма в X (порядково) монотонна полна, если выполнено условие (B): $0 \leqslant x_n \uparrow$, $x_n \in X$, $\sup||x_n||n \in X$;

3) норма в X (порядково) полунепрерывна, если выполнено условие (C): $0 \leqslant x_n \uparrow x \in X \Rightarrow \lim||x_n|| = ||x||$.

Ясно, что (A)⇒(C) (обратное неверное (см. пример 4)). Деиствительно, если $x_n \uparrow x$, то $x - x_n \downarrow 0$ в силу (A): $||x_n - x|| \to 0$,а так как $||x_n|| \geqslant ||x|| - ||x - x_n||$, то $\lim ||x_n|| \geqslant ||x||$. Обратное неравенство $\lim ||x_n|| \leqslant ||x||$ следует из монотонности $||x_n|| \leqslant ||x||$. Как показывают следующие примеры, других связеи между этими порядковыми своиствами, вообще говоря, нет.

Примеры

1. Из теорем Леви, Лебега и Фату о предельном переходе под знаком интеграла следует, что в пространстве $L_1(T)$ с обычнои нормои $\|x\| = \int\limits_T x d\mu$ выполнены все условия (A), (B), (C).

2. Пространство c_0 с обычнои нормои удовлетворяет условию (A) и не удовлетворяет условию (B). Деиствительно, пусть $0 \leqslant x_n \in c0$; $x_n \downarrow 0$. Если $x_n = (a_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$, то $a_n^{(k)} \geqslant 0$; $a_n^{(k)} \to 0$ $(\lim\limits_{k\to\infty} a_n^{(k)} = 0)$,причем для $\forall k \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(k)} = = 0$. Пусть ε > 0. Далее $\|x_n\| = \sup\limits_k a_n^{(k)}$. Существует k_0 такое, что $a_n^{(k)} < \varepsilon$ при $k>k_0$. Тогда $a_n^{(k)} < \varepsilon$ при $k>k_0$ и любом n. Так как $a_n^{(k)} \uparrow 0$ при $n \uparrow \infty$ и $k = 1,2,...,k_0$, то $\exists n_0$ такое, что все $a_{n_0}^{(1)}, \ldots, a_{n_0}^{(k)} < \varepsilon$. Тогда при $n \geqslant n_0$, $\|x_n\| = \sup\limits_k a_n^{(k)} = \max(\sup\limits_1^{k_0} a_n^{(k)}, \sup\limits_{k_0+1}^{\infty} a_n^{(k)}) < \varepsilon$, то есть $\lim\|x_n\|=0$.

3. Приведем пример пространства со своиством (B) и без своиства (C). Рассмотрим пространство l^∞. Для $x = (a_k)_1^\infty \in l^\infty$ полагаем $\|x\| = \sup|a_k| + \overline{\lim}|a_k|$.

В l^∞ можно рассмотреть и обычную норму $\|x\|_\infty = \sup|a_k|$, а так как $\|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant 2\|x\|_\infty$, то эти две нормы эквиваленты и так как $\|\cdot\|_\infty$ очевидно удовлетворяет своиству (B), то и рассматриваемая норма $\|\cdot\|$ также обладает своиством (B). Положим $x_n = (1,...,1,0,...)$, $x = (1,...,1,1,...)$. Тогда $0 \leqslant x_n \uparrow x$, $\|x_n\|=1$, а $\|x\|=2$,то есть $\lim\|x_n\| \neq \|x\|$ или в X не выполнено своиство (C).

4. Пространство c_0 с обычнои нормои удовлетворяет условию (B) и (C) и не удовлетворяет условию (A). Деиствительно, пусть $x_n = (0, . . . , 0, 1, . . .)$, $x_n\downarrow = (0,0,...,0)=0$,но $\|x_n\| = 1 \nrightarrow \|0\| = 0$,то есть в X нет (A).Тогда $0 \leqslant x_n = (a_n^{(k)}) \uparrow$ (то есть $\forall k, \ a_n^{(k)} \uparrow$) при $n \to \infty$. И $\|x\| \leqslant C$, $\sup\limits_{k,n} a_n^{(k)} \leqslant C.$

Если заменим во всех трех условиях (A), (B), (C) монотонные последовательности последовательностями монотонными вбок, то получим формально более слабые условия (Ad), (Bd), (Cd). Однако (см. [1]) эти условия эквиваленты: (A) ⇔ (Ad), (B) ⇔ (Bd), (C) ⇔ (Cd).

Другие специальные порядковые своиства нормы в НИП

Пусть число $\lambda \geqslant 1$. Говорят, что$X \in (C_\lambda)$, если из $0 \leqslant x_n \uparrow x \in X$ следует $\|x\| \leqslant \lambda \lim\|x_n\|$.

Ясно, что если $\lambda < \mu$ и $X \in (C_\lambda)$, то $X \in (C_\mu)$. Покажем, что обратное неверно.

Пример 1

Пусть $1 \leqslant \lambda \infty$ по составу элементов и для $x = (a_k)_1^\infty \in X$

$$x = \sup_k |a_k| + (\mu - 1)\overline{\lim}|a_k| \ .$$

Покажем, что $X \notin (C_\lambda)$. Положим

$$x_n = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, 0, \ldots) \ (n = 1, 2, \ldots)$$

Тогда $||x_n||=1$ и $x_n \uparrow x=(1,...,1,1,...)=x$, а $||x||=\mu>\lambda \lim||x_n||$ и, следовательно, $X \notin (C_\lambda)$

.

Проверим, что $X \in (C_\mu)$. Пусть $x_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}, \ldots)$, а $x = (a_1,a_2,...,a_k,...)$. Тогда $x_n \uparrow x$ и для любого k получаем, $a_k^{(n)} \uparrow_n a_k$.

Тогда

$$\|x\| = \sup_n a_k + (\mu - 1) = \overline{\lim_{k\to\infty}} a_k^{(n)} \leqslant \sup_n (\|x_n\|) + (\mu-1)\|x_n\| = \sup_n \mu\|x_n\| =$$

$$\mu \lim \|x_n\|.$$

Говорят, что в X выполнено условие (C^*) ($X \in C^*$), если $\exists \lambda \geqslant 1$ такое, что $x \in (C_\lambda)$.

Пример 2

Здесь мы приведем пример НИП (X, $||\cdot||$), в котором не выполнено условие (C^*). Пусть k — натуральное число. Рассмотрим $X_k = l^\infty$ по составу и для $x \in X_k$ $||x||_k = \sup |a_k| + k\lim|a_k|$. Тогда $X_k \notin (C_k)$, так как если

$$x_n = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, 0, \ldots), \text{ то } \|x_n\| = 1, \ x_n \uparrow \mathbb{1} = (1, \ldots, 1, 1, \ldots)$$

$$(x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \uparrow \mathbb{1}, \ \lim \|x_n\|_k = 1, \ \|\mathbb{1}\|_k = k + 1)$$

Строим пространство X по типу l^∞, точнее $X = \prod_1^\infty X_k = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times \ldots$, где все $X_k = l^\infty$ по составу. Элементы этого пространства $x = (y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots) = (y_k)_{k=1}^\infty$, где $\forall k \ y_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{km}, \ldots) = (a_{km})_{m=1}^\infty$ т.ч.

$$\|x\| = \sup_k \|x_k\|_k < \infty$$

Итак, $x = (a_{km})_{k,m=1}^\infty$ — матрица, т.ч. $\sup_k [\sup_m |a_{km}| + $

$$+ k \overline{\lim_{m\to\infty}} \|a_{km}\|] < \infty.$$

Достаточно показать, что $X \notin C_N$ для любого натурального N. Пусть x_n =(akn),где

a_{kn}=1 при1⩽k⩽n, 1⩽m⩽N+1, остальные a_{kn} =0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Тогда x_n ↑x=(b_{km}),где b_{km}=1 при 1⩽kkm= 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Тогда легко видеть, что $||x_n||$=1, а ||x|| = N + 1. Поэтому $X \notin C_N$.

Как уже указано ранее, условия (B) и (C) независимы друг от друга. И, например, из условия (B) не следует условие (C). Однако, как показывает следующее утверждение, из условия (B) следует формально более слабое условие (C*), т.е. при выполнении условия (B) выполняется условие (C_λ) при некотором λ ⩾ 1.

Теорема 4 *Если X ∈ (B), то X ∈ (C*).*

Доказательство. Пусть это не так, т.е. $X_n \notin (C_\lambda)$ *для любого X. Так как* $2^n \cdot m$ *не является числом λ, то* $\exists \{a_m\}_1^\infty,\ \{x_{mn}\}_{m.n=1}^\infty \subset X\ т.ч.\ 0 \leqslant x_{mn} \uparrow_n a_m$ *и* $\|a_m\| \geqslant m,\ a\ \sup\limits_n \|x_{mn}\| < \frac{1}{2^m}$ *. Положим* $y_n = x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{nn}$. *Тогда* $y_{n+1} = x_{1,n+1} + x_{2,n+1} + ... + x_{n,n+1} + x_{n+1,n} = 1$, *то есть* $0 \leqslant y_n \uparrow$ *и*

$$\|y_n\| \leqslant \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1\ .$$

По (B) ∃z∈X т.ч. $y_n \leqslant z$, *∀n. Если m фиксированно, то* $x_{mn} \leqslant y_n \leqslant z$, *и поэтому* $a_m \leqslant z$, *то есть m⩽||z|| для всех натуральных чисел m.*

О своистве монотоннои полноты нормы в НИП

В этом пункте мы приведем два своиства в НИП X, которые эквивалент- ны условию (B) — своиству монотоннои полноты нормы.

Говорят, что НИП X удовлетворяет условию (D) (X ∈ (D)), если для любои последовательности x_n такои, что

$0 \leqslant x_n \uparrow \infty$, существует такая числовая последовательность $\xi_n \downarrow 0$, что $\{\xi_n x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена в X по упорядочению.

Будем говорить, что НИП X удовлетворяет условию (D^2) ($X \in (D^2)$), если из того, что $0 \leqslant x_n \uparrow_{m=1}^{\infty} \infty$ для любого n следует что существует такая последовательность индексов m_n (n = 1, . . .) такая, что $\{x_{m_n n}\}$ не ограничена по упорядочению в X.

Лемма 1 *Пусть X — НИП. Тогда, если* $X \in (D^2)$, *то* $X \in (D)$. *Деиствительно, пусть* $0 \leqslant x_n \uparrow +\infty$. *Положим* $x'_{mn} = \frac{1}{n} x_m$, *(m,n= 1,2,...). Тогда* $0 \leqslant x_n \uparrow_{m=1}^{\infty} +\infty$ *для любого n. Так как* $x \in (D^2)$, *существует* $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, *что* $\{x_{m_n n}\}_{n=1}^{\infty}$ *не ограничена в X, то есть* $\{\frac{1}{n} x_{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *не ограничена. Положим,*

$$\xi_k = \begin{cases} 1, \ k \leqslant m_1; \\ \frac{1}{n}, \ m_{n-1} < k \leqslant m_n. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что последовательность mn возрастающая. Ясно, что тогда $\{\xi_x x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не ограничена в X.*

Теорема 5 *Для любого пространства X (БИП) следующие утверждения эквивалентны:*
1) в X выполнено (B),
2) в X выполнено (D),
3) в X выполнено (D2).

Проведем доказательство про схеме (3) ⇒ (2) ⇒ (1) ⇒ (3). Импликация (3) ⇒ (2) доказана в лемме 1. Докажем импликацию (2) ⇒ (1): достаточно убедиться, что в X выполнено (Bd). Допустим противное, то есть существует последовательность $0 \leqslant x_n \uparrow\_$ *и* $\sup\|x_n\| < +\infty$. *Допустим, что* $\sup x_n = +\infty$ *в X по умолчанию. Положим,* $y_1 = x_1$; $y_k = x_k - x_{k-1}$. *Тогда* $y_i d y_i$ $(i \neq j)$. *Рассмотрим ряд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k y_k \ .$$

Тогда при m < n имеем $\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k y_k \| \leqslant \| \sum_{k=m}^{n} \xi_m y_k \| \leqslant \xi_m \| \sum_{k=1}^{n} y_k \| = \xi_m \|x_n\| \underset{m\to\infty}{\to} 0.$ *Поэтому* $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k y_k$ *сходится по мере (т.к. X — банахово). Пусть* $z = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k y_k$ *(сходимость ряда по норме).*

Тогда:

$$\xi_k x_n = \xi_n \sum_{k=1}^{n} y_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \xi_k y_k \leqslant z$$

для любого n, то есть $\xi_n x_n$ ограничена по упорядочению.

Наконец, докажем импликацию (1) ⇒ (3): пусть $0 \leqslant x_{mn} \uparrow_{m=1}^{\infty} +\infty$ *для любого n. В силу (B) справедливо* $\|x_{mn}\| \uparrow_{m=1}^{\infty} +\infty$ *для любого n. За m_n берем такои индекс, что* $\|x_{m_n n}\| \geqslant n.$ *. А тогда* $\{x_{m_n n}\}$ *не ограничена по упорядочению, так как не ограничена по норме, то есть в X выполнено (D^2).*

Список литературы

[1] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ / М.: Наука. Изд. 3-е, 2004 - с. 752

[2] П. П. Забрейко. Идеальные пространства функций / Вестник Ярославского университета, 2003., Выпуск 8, с. 12—52

[3] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen. Riesz spaces. Vol. I. North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam — London; Americam Elsevier Publishing Co., New York, 2005, p, 521

[4] Т. А. Самусенко. Порядковые свойства нормы в пространствах измеримых функций. Выпускная квалификационная работа, 2015

Mathematics and Mechanics

Normed lattices of measurable functions and order properties of the norm

SAMUSENKO Timur Aleksandrovich

Petrozavodsk State University (Lenina, 33), timur.a.samusenko@gmail.com

Ключевые слова:
ordinal properties of a norm
measurable functions

Аннотация: The article "Normed lattices of measurable functions and order properties of the norm" is devoted to some questions on the properties of a norm in normed spaces of measurable functions.

Bibliography

[1] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov. Functional Analysis / M .: The science. Ed. 3rd, 2004 - with. 752

[2] P. P. Zabreiko. Ideal spaces of functions / Bulletin of the Yaroslavl University, 2003., Issue 8, p. 12-52

[3] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen. Riesz spaces. Vol. I. North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; Americam Elsevier Publishing Co., New York, 2005, p. 521

[4] T. A. Samusenko. Ordinal properties of a norm in spaces of measurable functions. Graduation qualification work, 2015