

САМСОНОВ
Иван Александрович

бакалавриат, Петрозаводский государственный
университет (Петрозаводск, Россия),
vanya05samson73@mail.ru

НЕРАВЕНСТВО ТИПА СМИРНОВА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ, ИМЕЮЩИХ ОДИН НУЛЬ В ЛЕВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Научный руководитель:

Компанеец Екатерина
Геннадьевна

Рецензент:

Старков Виктор Васильевич

Статья поступила: 13.05.2026;

Принята к публикации: 27.06.2026;

Размещена в сети: 27.06.2026.

Аннотация. В 1887 году Д.И. Менделеев поставил следующую математическую задачу: для многочлена f , $|f(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$, оценить $|f'(x)|$. Этот вопрос привел к появлению большого количества работ по различным типам дифференциальных неравенств для многочленов. В классических исследованиях предполагалось, что все нули мажорирующего многочлена лежат в одной области (например, в единичном круге, правой полуплоскости и т. д.). Мы снимаем это требование, допуская, что один нуль находится в левой полуплоскости, остальные – в правой. В данной статье получен аналог неравенства Смирнова для таких многочленов.

Ключевые слова: многочлены, неравенство Смирнова, оператор Смирнова

Для цитирования: Самсонов И. А. Неравенство типа Смирнова для многочленов, имеющих один нуль в левой полуплоскости // StudArctic Forum. 2026. Т. 11, № 2. С. 85–96.

В 1887 году знаменитый химик Д.И. Менделеев в своей книге «Исследование водных растворов по удельному весу» [Менделеев: 86] поставил следующую математическую задачу: для многочлена f второй степени, $|f(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$, оценить $|f'(x)|$. Этот вопрос привел к появлению большого количества работ по различным типам дифференциальных неравенств для многочленов. Цель данной работы – получить модификацию теорем Бернштейна и Смирнова [Смирнов]; [Bernstein]. В классических исследованиях предполагалось, что все нули мажорирующего многочлена лежат в одной области (например, в единичном круге, правой полуплоскости и т. д.). Мы снимаем это требование, допуская, что один нуль находится в левой полуплоскости. Задача нашего исследования состоит в том, чтобы получить аналог неравенства Смирнова для случая, когда один нуль лежит в левой полуплоскости, и выяснить, какому множеству будет принадлежать параметр из неравенства Смирнова при определенных условиях.

* * * * *

Первой работой по дифференциальным неравенствам стала работа А.А. Маркова, который в 1889 году ответил на вопрос Менделеева для многочлена произвольной степени.

Обозначим \mathcal{P}_n - множество многочленов, степени не превосходящей $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1 [Марков, 1889]; [Марков, 1948: 51-75].

Пусть $f \in \mathcal{P}_n$ и $|f(x)| \leq M$ для $x \in [a, b]$. Тогда

$$|f'(x)| \leq \frac{2n^2 M}{b-a}, x \in [a, b].$$

Равенство выполняется только для

$f(x) = \pm M T_n \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right)$, где $T_n = \cos(n \arccos x)$ – многочлены Чебышёва.

В 1892 году В.А. Марков обобщил теорему 1 для производных произвольного порядка [Марков, 1892: 81-93]. Вопрос, поднятый Менделеевым, был сформулирован в книге Смирнова и Лебедева [Смирнов: 340] и назван задачей Менделеева:

пусть $B \subset \mathbb{C}$ – компактное множество, $f(z)$ – многочлен, $\deg f = n \geq 1$, $|f(z)| \leq M, z \in B$. Нужно оценить $|f'(z)|$ для $z \in B$. Напомним, в первоначальной задаче компактом являлся отрезок $[a, b]$.

В.И. Смирнов рассмотрел случай комплексных многочленов и компактного множества $B = \partial \mathbb{D}$, где $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ – единичный круг.

Теорема 2

Пусть $f \in \mathcal{P}_n$ и $|f(z)| \leq M$ на $\partial \mathbb{D}$. Тогда на $\partial \mathbb{D}$

$$|f'(z)| \leq Mn.$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда $f(z) = M e^{i\gamma} z^n, \gamma \in \mathbb{R}$.

Теорему 2 можно переформулировать.

Теорема 3

Пусть $f \in \mathcal{P}_n$ и $|f(z)| \leq |M z^n|$ на $\partial \mathbb{D}$. Тогда на $\partial \mathbb{D}$

$$|f'(z)| \leq |(M z^n)'|.$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда $f(z) = M e^{i\gamma} z^n, \gamma \in \mathbb{R}$.

В 1930 году С.Н. Бернштейн получил обобщение теоремы 3, заменив многочлен $M z^n$ на произвольный многочлен F степени n .

Теорема 4 [Bernstein].

Пусть f и F – многочлены, удовлетворяющие следующим условиям (*):

- 1) $\deg f \leq \deg F = n$;
- 2) $|f(z)| \leq |F(z)|$ на $\partial \mathbb{D}$;
- 3) все нули многочлена F лежат в $\bar{\mathbb{D}}$.

Тогда, для $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$,

$$|f'(z)| \leq |F'(z)|.$$

Для $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ равенство выполняется тогда и только тогда, когда $f(z) = M e^{i\gamma} z^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

В.И. Смирнов получил обобщение теоремы 4. Для $R \geq 1$ через ω_R (рис. 1) обозначим образ круга $\{t \in \mathbb{C}; |t| \leq R\}$ под действием отображения $\psi(t) = \frac{t}{1+t}$. Для $f \in \mathcal{P}_n, \alpha \in \mathbb{C}$, обозначим

$$S_\alpha[f](z) = z f'(z) - n \alpha f(z) \text{ – оператор Смирнова.}$$

Теорема 5 [Смирнов: 356].

Пусть $R \geq 1$, f и F – многочлены, удовлетворяющие условиям (*). Тогда, для $|z| = R$ и $\alpha \in \omega_R$ (рис. 1),

$$|S_\alpha[f](z)| \leq |S_\alpha[F](z)|.$$

Для $\alpha \in \text{int} \omega_R$ (рис. 1) и $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$, равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$f = e^{i\gamma} F, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ получается теорема 4.

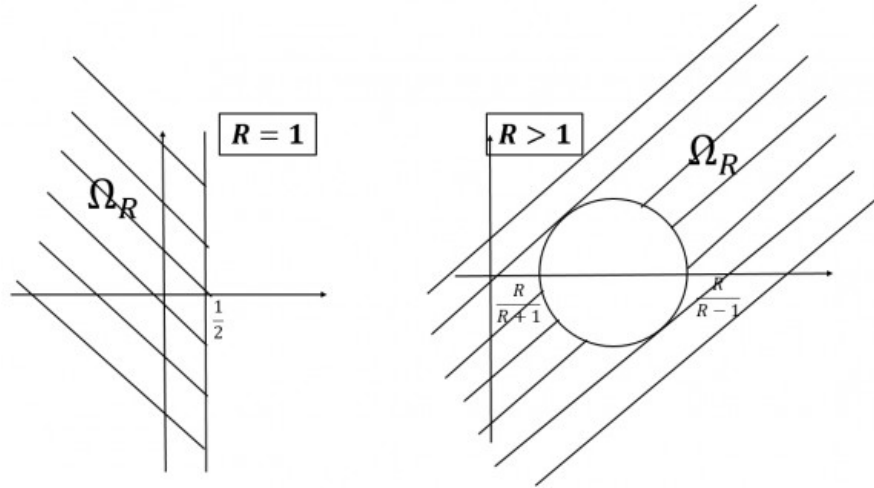


Рис 1. ω_R .

Пусть задана область $G_{u_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{n}{2u_0} \right| > \frac{n}{2u_0} \right\}, u_0 > 0$.

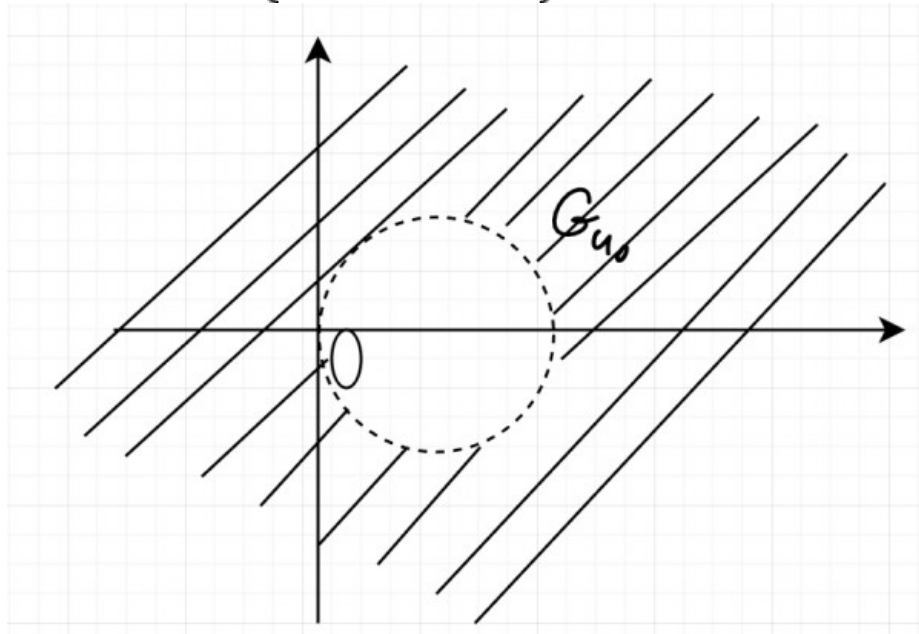


Рис. 2. Область $G_{u_0}, u_0 > 0$.

Для $u_0 = 0$: $G_{u_0} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0 \}$.

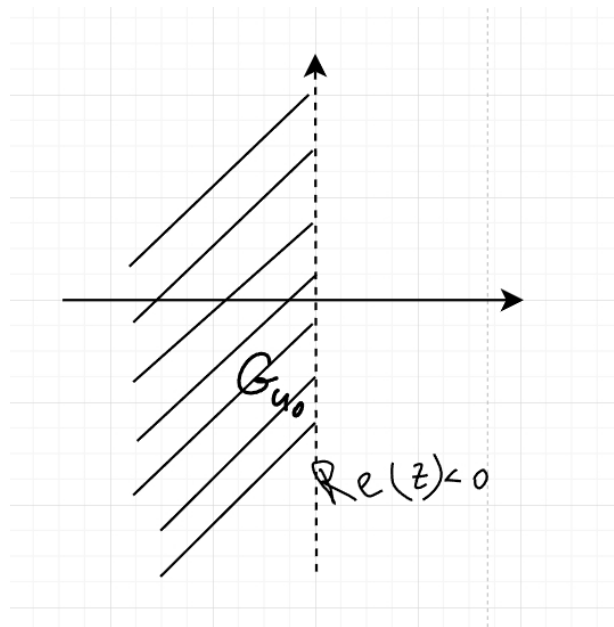


Рис. 3. Область G_{u_0} , $u_0 = 0$

Теорема 6 [Смирнов: 364].

Пусть f и F — многочлены, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\deg f \leq \deg F = n$;
- 2) $|f(z)| \leq |F(z)|$ на прямой $\operatorname{Re}(z) = 0$;
- 3) все нули многочлена F лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Пусть $u_0 \geq 0$ — фиксированное число.

Тогда для любого z , удовлетворяющего условию $\operatorname{Re}(z) \leq -u_0$ выполняется неравенство

$$|f'(z) + \alpha f(z)| \leq |F'(z) + \alpha F(z)|, \quad (1) \text{ где } \alpha \in \overline{G}_{u_0}.$$

Современные исследования по дифференциальным неравенствам для многочленов можно найти в ряде работ [Govil]; [Kompaneets, 2025: 23-43]; [Mir: 259-264]; [Rashid: 75-86]; [Rather: 101-117]; [Kompaneets, 2022: 388-397].

Новый результат. В теореме 6 предполагалось, что все нули многочлена лежат в правой полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 0$. Но что будет, если ослабить ограничение на нули, допуская что один нуль лежит в левой полуплоскости $\operatorname{Re}(z) < 0$?

Теорема 7

Пусть f и F — многочлены, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\deg f \leq \deg F = n$;
- 2) $|f(z)| \leq |F(z)|$ на прямой $\operatorname{Re}(z) = 0$;
- 3) $z_0 < 0$ — единственный нуль k -го порядка многочлена F , лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) \leq 0$, $1 \leq k \leq n-1$; остальные нули многочлена F лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Пусть $u_0 \geq 0$ — фиксированное число.

Тогда для любого z , удовлетворяющего условию $\operatorname{Re}(z) \leq -u_0$, выполняется неравенство

$$|f'(z) + \beta f(z)| \leq |F'(z) + \beta F(z)|, \quad (2)$$

для $\beta \in E_{u_0}$, где E_{u_0} — одно из следующих множеств:

- 1) полуплоскость

$$\left\{ \beta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\beta) \leq \frac{k}{z_0} \right\},$$

в случае, когда $z \in \operatorname{Re}(z) = 0, u_0 = 0$;

- 2) дополнение к полосе

$$\left\{ \beta \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(\beta) < \frac{n}{u_0} \right\},$$

в случае, когда $z, z_0 \in Re(z) = -u_0, u_0 > 0$;

3.1) дополнение до кольца

$$\left\{ \beta \in \mathbb{C} : r < \left| \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) \right| < \rho \right\},$$

где

$$r = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{k}{u_0 + z_0} \right| - \frac{n}{u_0} \right), \rho = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{k}{u_0 + z_0} \right| + \frac{n}{u_0} \right),$$

если $z \in Re(z) = -u_0, u_0 > 0, z_0 \notin Re(z) = -u_0, r \geq \{0\}$;

3.2) внешность круга

$$\left\{ \beta \in \mathbb{C} : \left| \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) \right| < \rho \right\},$$

если $z \in Re(z) = -u_0, u_0 > 0, z_0 \notin Re(z) = -u_0, r < 0$.

Стоит отметить, что похожее исследование уже проводилось Е.Г. Компанец и В.В. Старковым в 2021 году [Компанец, 2022]. Тогда рассматривался случай, когда все нули мажорирующего многочлена лежат в единичном круге \mathbb{D} , допуская при этом один нуль вне круга.

Доказательство. Обозначим $\overline{Du_0} = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq -u_0\}$. По условиям 2, 3 теоремы 7 многочлены f и F можно записать в следующем виде:

$$f(z) = (z - z_0)^k f_1(z) \text{ и } F(z) = (z - z_0)^k F_1(z), \text{ где } F_1(z_0) \neq 0. \quad (3)$$

Заметим, что многочлены f_1 и F_1 удовлетворяют условиям 1, 2, 3 теоремы 6. Распишем для f и F неравенство (2):

$$|f'(z) + \beta f(z)| \leq |F'(z) + \beta F(z)|, \quad (4)$$

$$z \in \overline{Du_0}.$$

Подставим многочлены (3) в неравенство (4):

$$\begin{aligned} & \left| \beta (z - z_0)^k f_1(z) + k (z - z_0)^{k-1} f_1(z) + (z - z_0)^k f_1'(z) \right| \leq \\ & \leq \left| \beta (z - z_0)^k F_1(z) + k (z - z_0)^{k-1} F_1(z) + (z - z_0)^k F_1'(z) \right|, \end{aligned}$$

$$z \in \overline{Du_0}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} & \left| f_1(z) \left[\beta (z - z_0)^k + k (z - z_0)^{k-1} \right] + f_1'(z) (z - z_0)^k \right| \leq \\ & \leq \left| F_1(z) \left[\beta (z - z_0)^k + k (z - z_0)^{k-1} \right] + F_1'(z) (z - z_0)^k \right|, \end{aligned} \quad (5)$$

$$z \in \overline{Du_0}.$$

Заметим, что при $z = z_0$ неравенство (5) верно для любого $\beta \in \mathbb{C}$. Далее будем считать, что $z \neq \{z_0\}$. Перепишем (5) в виде

$$\left| f_1(z) (z - z_0)^k \left[\beta + \frac{k}{z - z_0} \right] + f_1'(z) (z - z_0)^k \right| \leq \left| F_1(z) (z - z_0)^k \left[\beta + \frac{k}{z - z_0} \right] + F_1'(z) (z - z_0)^k \right|, \quad (6)$$

$$z \in \overline{Du_0}.$$

Разделим (6) на $(z - z_0)^k \neq 0$ и получим:

$$\left| f_1(z) \left(\beta + \frac{k}{z - z_0} \right) + f_1'(z) \right| \leq \left| F_1(z) \left(\beta + \frac{k}{z - z_0} \right) + F_1'(z) \right|, \quad (7)$$

$$z \in \overline{Du_0}.$$

Обозначим

$$\alpha = \beta + \frac{k}{z - z_0}. \quad (8)$$

Тогда неравенство (7) принимает вид (2).

Найдем множество изменения параметра β в неравенстве (2).

1. Рассмотрим случай, когда z лежит на прямой $Re(z) = 0$. Выразим из (8) параметр β :

$$\beta = \alpha - \frac{k}{z-z_0}. \quad (9)$$

По теореме 6 параметр α лежит в множестве $\overline{G}u_0$ (рис. 3). Значит, для фиксированного z , $Re(z) = 0$, множество B_z изменения параметра β получается сдвигом $\overline{G}u_0$ на $-\frac{k}{z-z_0}$:

$$B_z = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq c\}. \quad (10)$$

Образ прямой $Re(z) = 0$ под действием отображения $-\frac{k}{z-z_0}$ - это окружность с центром $\frac{k}{2z_0}$ и радиусом $\frac{k}{2z_0}$ (рис. 4), поэтому для всех z , таких что $Re(z) = 0$, параметр c из (10) лежит в отрезке $[\frac{k}{z_0}, 0]$.

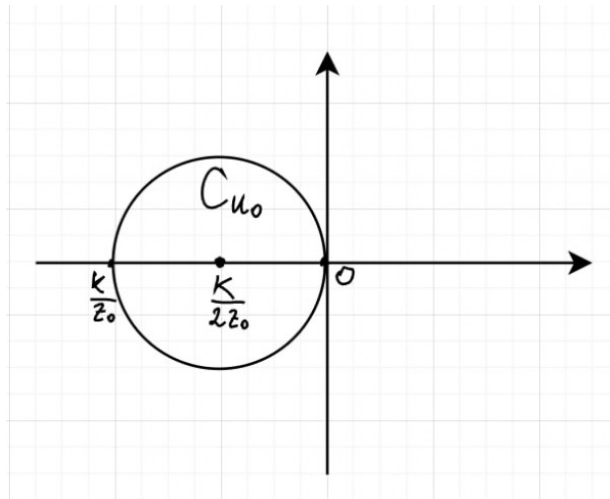


Рис. 4. Окружность C_{u_0}

Тогда искомое множество

$$Eu_0 = \bigcap_{Re(z)=0} B_z = \left\{ \beta \in \mathbb{C} : Re(\beta) \leq \frac{k}{z_0} \right\}. \quad (11)$$

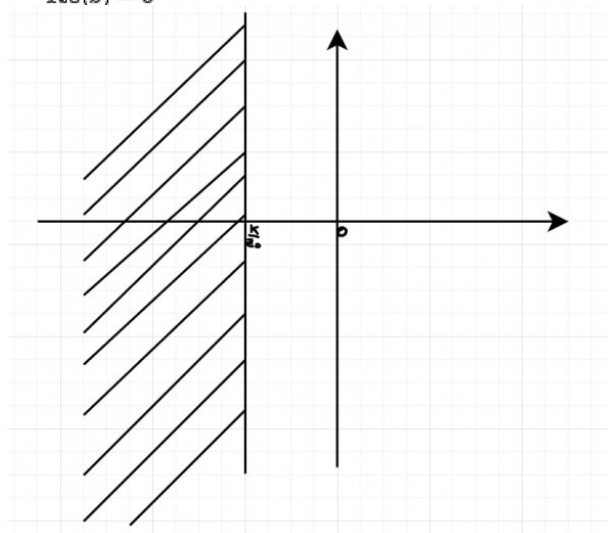


Рис. 5. Множество E_{u_0} , $u_0 = 0$

2. Рассмотрим случай, когда z лежит на прямой $Re(z) = -u_0, u_0 > 0, z_0$ тоже лежит на этой прямой. По (9):

$$\beta = \alpha - \frac{k}{z-z_0}.$$

По Теореме 6 параметр α лежит в множестве $\overline{G}u_0$ (рис. 2):

$$\overline{G}u_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{n}{2u_0} \right| \geq \frac{n}{2u_0} \right\}.$$

Выполняя сдвиг $\overline{G}u_0$ согласно (9) на $-\frac{k}{z-z_0}$, мы получаем множество B_z изменения параметра β , при фиксированном z :

$$B_z = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \left(\frac{n}{2u_0} - \frac{k}{z-z_0} \right) \right| \geq \frac{n}{2u_0} \right\}.$$

Образом прямой $Re(z) = -u_0, u_0 > 0$, под действием $-\frac{k}{z-z_0}$, является прямая $Re(z) = 0$ (мнимая ось). Тогда центры кругов B_z лежат на прямой $Re(z) = \frac{n}{2u_0}$. Поэтому искомое множество $E u_0$ (рис. 6) является дополнением к полосе $\left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < Re(z) < \frac{n}{u_0} \right\}$:

$$E u_0 = \bigcap_{Re(z) = -u_0} B_z = \left\{ \beta \in \mathbb{C} : Re(\beta) \leq 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \mathbb{C} : Re(\beta) \geq \frac{n}{u_0} \right\}.$$

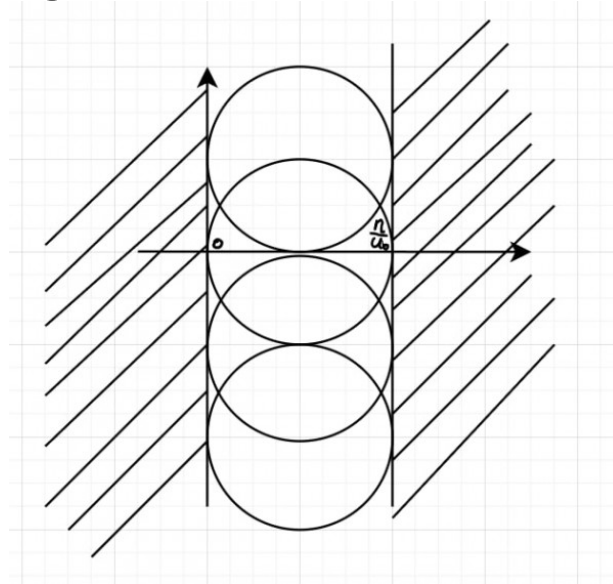


Рис. 6. Множество $E u_0, z, z_0 \in Re(z) = -u_0$.

3. Рассмотрим случай, когда z лежит на прямой $Re(z) = -u_0, u_0 > 0$, причем z_0 не лежит на этой прямой. Возможно 2 ситуации:

$$z_0 > -u_0 \text{ и } z_0 < -u_0$$

По (9):

$$\beta = \alpha - \frac{k}{z-z_0}.$$

По Теореме 6 параметр α лежит в множестве $\overline{G}u_0$. Тогда, аналогично рассуждениям из случая 2, приходим к множеству B_z изменения параметра β , при фиксированном z :

$$B_z = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \left(\frac{n}{2u_0} - \frac{k}{z-z_0} \right) \right| \geq \frac{n}{2u_0} \right\}, \quad (13)$$

т.е. B_z - внешность круга радиуса $\frac{n}{2u_0}$ с центром $c_z = \frac{n}{2u_0} - \frac{k}{z-z_0}$.

а) Пусть $z_0 > -u_0$. В этом случае, образом прямой $Re(z) = -u_0$, под действием $-\frac{k}{z-z_0}$, является окружность $C u_0$, проходящая через начало координат:

$$C u_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \frac{k}{u_0 + z_0} \right| = \frac{1}{2} \frac{k}{u_0 + z_0} \right\}.$$

Заметим, что центры c_z окружности ∂B_z получаются сдвигом точки $\frac{n}{2u_0}$ на точки, лежащие на окружности $C u_0$. Тогда c_z лежат на окружности

$$C_{1u_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) \right| = \frac{1}{2} \frac{k}{u_0 + z_0} \right\}.$$

a_1) Если $\frac{n}{2u_0} \leq \frac{1}{2} \frac{k}{u_0 + z_0}$, т.е. $(n-k)u_0 + nz_0 \leq 0$, то искомое множество $E_{u_0} = \bigcap_{\operatorname{Re}(z) = -u_0} B_z$

является дополнением к кольцу K_{u_0} :

$$K_{u_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \left(\frac{k}{z_0 + u_0} - \frac{n}{u_0} \right) < \left| z - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{z_0 + u_0} \right) \right| < \frac{1}{2} \left(\frac{k}{z_0 + u_0} + \frac{n}{u_0} \right) \right\}.$$

Обозначим ρ и r – радиусы окружностей, образующих кольцо K_{u_0} :

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{z_0 + u_0} + \frac{n}{u_0} \right) - \text{радиус внешней окружности};$$

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{z_0 + u_0} - \frac{n}{u_0} \right) - \text{радиус внутренней окружности}.$$

Тогда искомое множество можно записать в виде (14):

$$E_{u_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) \right| \geq \rho \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) \right| \leq r \right\}. \quad (14)$$

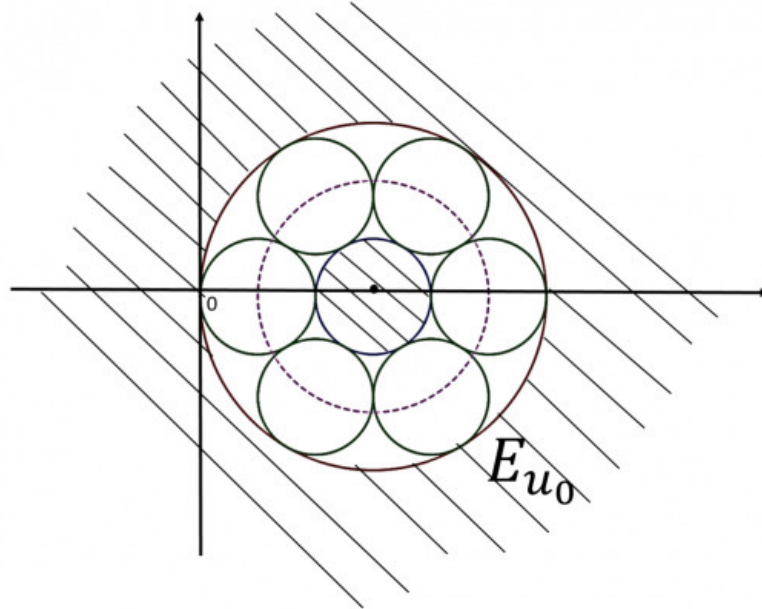


Рис. 7. Множество E_{u_0}

a_2) Если $\frac{n}{2u_0} > \frac{1}{2} \frac{k}{u_0 + z_0}$, т.е. $(n-k)u_0 + nz_0 > 0$, то искомое множество $E_{u_0} = \bigcap_{\operatorname{Re}(z) = -u_0} B_z$ является дополнением до круга S_{u_0} :

$$S_{u_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{z_0 + u_0} \right) \right| < \rho \right\}.$$

Тогда искомое множество можно записать в виде (15):

$$E_{u_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) \right| \geq \rho \right\}. \quad (15)$$

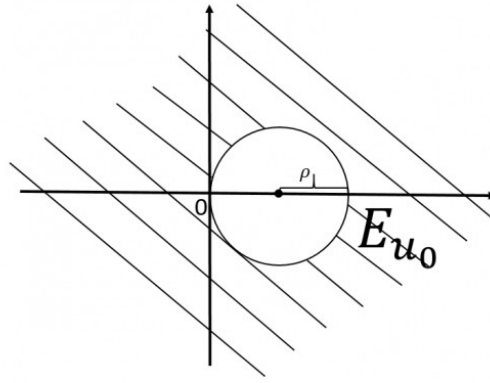


Рис. 8. Множество E_{u_0}

b) Пусть $z_0 < -u_0$. В этом случае образом прямой $Re(z) = -u_0$, под действием $-\frac{k}{z-z_0}$, будет окружность L_{u_0} :

$$L_{u_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \frac{k}{u_0 + z_0} \right| = -\frac{1}{2} \frac{k}{u_0 + z_0} \right\}.$$

В этом случае центры c_z окружности ∂B_z получаются сдвигом точки $\frac{n}{2u_0}$ на точки, лежащие на окружности L_{u_0} . Тогда центры кругов B_z в (13) лежат на окружности

$$L_{1u_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) \right| = -\frac{1}{2} \frac{k}{u_0 + z_0} \right\}.$$

b₁) Пусть $\frac{n}{2u_0} + \frac{1}{2} \frac{k}{u_0 + z_0} \leq 0$, т. е. $u_0(n+k) + nz_0 \leq 0$. Тогда искомое множество $E_{u_0} = \bigcap_{Re(z) = -u_0} B_z$ – дополнение к кольцу

$$K_{1u_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \left(-\frac{k}{u_0 + z_0} - \frac{n}{u_0} \right) < \left| z - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) \right| < \frac{1}{2} \left(-\frac{k}{u_0 + z_0} + \frac{n}{u_0} \right) \right\}.$$

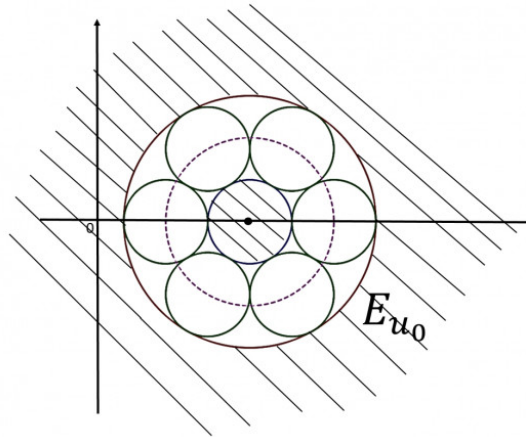


Рис. 9. Множество E_{u_0}

b₂) Пусть $\frac{n}{2u_0} + \frac{1}{2} \frac{k}{u_0 + z_0} > 0$, т. е. $u_0(n+k) + nz_0 > 0$.

Тогда искомое множество $E_{u_0} = \bigcap_{Re(z) = -u_0} B_z$ – это внешность круга.

$$\gamma_{u_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) \right| < \frac{1}{2} \left(-\frac{k}{u_0 + z_0} + \frac{n}{u_0} \right) \right\}.$$

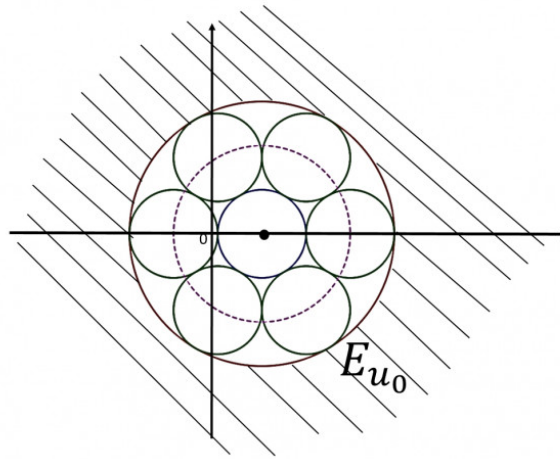


Рис. 10. Множество E_{u_0}

Объединив случаи *a)* и *b)* получим, что искомое множество E_{u_0} в случае, когда z лежит на прямой $Re(z) = -u_0$, $u_0 > 0$, а z_0 не лежит на $Re(z) = -u_0$ имеет вид:

$$E_{u_0} = \left\{ \beta \in \mathbb{C} : \left| \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) t \right| \geq \rho \right\} \cup \left\{ \beta \in \mathbb{C} : \left| \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) \right| \leq r \right\}, r \geq 0,$$

$$\left\{ \beta \in \mathbb{C} : \left| \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{u_0} + \frac{k}{u_0 + z_0} \right) \right| \geq \rho \right\}, r < 0,$$

где
(16)

$$R = \frac{1}{2} \left| \frac{k}{u_0 + z_0} \right|,$$

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{k}{u_0 + z_0} \right| + \frac{n}{u_0} \right),$$

$$r = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{k}{u_0 + z_0} \right| - \frac{n}{u_0} \right).$$

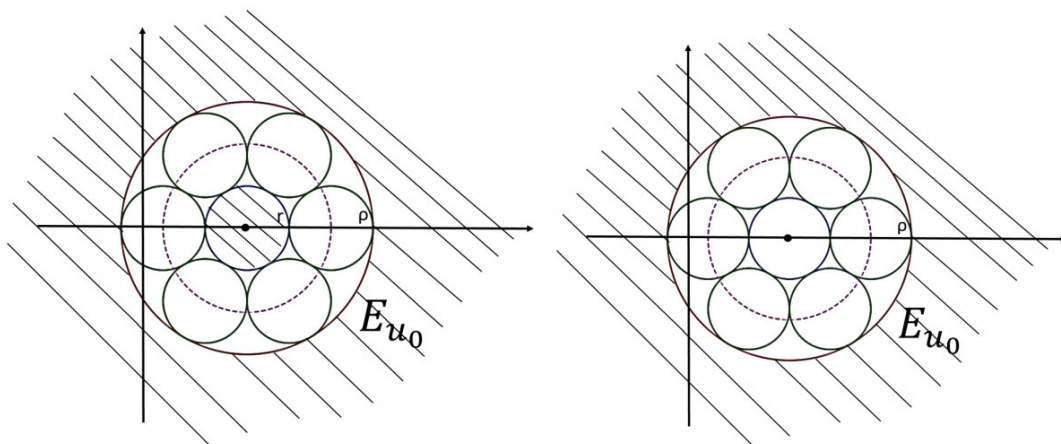


Рис. 11. Множество E_{u_0} ; $z \in Re(z) = -u_0$; $z_0 \notin Re(z) = -u_0$

В ходе исследования работы была подробно изучена история задачи оценки производных многочленов, поставленной Д.И. Менделеевым в 1887 году. Были рассмотрены классические результаты А.А. Маркова, В.А. Маркова, С.Н. Бернштейна и В.И. Смирнова. В большинстве из них предполагалось, что все нули мажорирующего многочлена лежат в одной области (единичном круге или правой полуплоскости). На основе современного результата, полученного

Е.Г. Компанец и В.В. Старковым, возник вопрос: можно ли получить аналог теоремы В.И. Смирнова, предположив, что один нуль многочлена лежит в левой полуплоскости, а остальные – в правой?

Ответом на поставленный вопрос является сформулированная и доказанная в работе теорема 7. В ходе доказательства было получено обобщение (аналог) неравенства Смирнова для нового случая. Существенным результатом является описание искомого множества изменения параметра β . Установлено, что структура этого множества зависит от взаимного расположения z, z_0 относительно прямой $Re(z) = -u_0$, причём $z_0 < 0$.

Таким образом, поставленная цель работы достигнута: получен аналог неравенства В.И. Смирнова и определено множество изменения параметра β , при котором новое неравенство остаётся верным.

Список литературы

Марков А.А. Об одном вопросе Д.И. Менделеева // Известия Императорской Академии наук. 1889. Т. 62, № 4. С. 1-24.

Марков А.А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. Москва; Ленинград: ОГИЗ, Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1948. 412 с.

Марков В.А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. Санкт-Петербург: Тип. Императорской академии наук, 1892. 111 с.

Менделеев Д.И. Исследование водных растворов по удельному весу. Санкт-Петербург: Тип. В. Демакова, 1887. 312 с.

Смирнов В.И. Конструктивная теория функций комплексного переменного / В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев. Москва: Наука, 1964. 555 с.

Bernstein S. Sur la limitation des dérivées des polynômes // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 1930. Т. 191. С. 338-341.

Kompaneets E.G. On removing restrictions in the Bernstein theorem and its modifications / E.G. Kompaneets, V.V. Starkov, E.S. Shmidt // Issues of Analysis. 2025. Vol. 14(32), No. 3. P. 23-43. DOI: 10.15393/j3.art.2025.19212

Govil N.K. Progress in approximation theory and applicable complex analysis. In memory of O.I. Rahman / N.K. Govil, R. Mohapatra, M.A. Qazi, G. Schmeisser // Springer Optimization and Its Applications. 2017. Vol. 117. 519 p. DOI: 10.1007/978-3-319-49242-1

Kompaneets E.G. On the Smirnov type inequality for polynomials / E.G. Kompaneets, V.V. Starkov // Mathematical Notes. 2022. Vol. 111. № 3. P. 388-397. DOI: 10.1134/S0001434622030063

Kompaneets E.G. Smirnov and Bernstein type inequalities, taking into account higher-order coefficients and free terms of polynomials / E.G. Kompaneets, L.G. Zyбина // Issues of Analysis. 2024. Vol. 13(31), No. 1. P. 3-23. DOI: 10.15393/j3.art.2024.14270

Mir M.Y. Application of Gauss–Lucas theorem to the inequalities for polynomials / M.Y. Mir, W.M. Shah // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2025. Vol. 58, No. 2. P. 259-264. DOI: 10.1134/S1063454125700244

Rashid R. Generalized Bernstein-type inequalities for rational functions with restriction on zeros and poles / R. Rashid, W.M. Shah // The Journal of Analysis. 2026. Vol. 34. P. 75-86. DOI: 10.1007/s41478-025-00992-9

Rather N.A. Integral mean estimate for polynomials with restricted zeros / N.A. Rather, N. Wani, A. Bhat // Issues of Analysis. 2024. Vol. 13(31), No. 3. P. 101-117. DOI: 10.15393/j3.art.2024.16050

SMIRNOV-TYPE INEQUALITY FOR POLYNOMIALS WITH ONE ZERO IN THE LEFT HALF-PLANE

Scientific adviser:

Ekaterina G. Kompaneets

Reviewer:

Victor Starkov

Paper submitted on: 05/13/2026;

Accepted on: 06/27/2026;

Published online on: 06/27/2026.

Abstract. In 1887, D. I. Mendeleev posed the following mathematical problem: for a polynomial f , $|f(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$, estimate $|f'(x)|$. This question has generated a large number of papers on various types of differential inequalities for polynomials. In classical studies, it was assumed that all the zeros of the majorizing polynomial lie in the same region (for example, in the unit circle, the right half-plane, etc.). We remove this requirement by assuming that one zero lies in the left half-plane and the others lie in the right half-plane. This paper obtains an analogue of the Smirnov inequality for such polynomials.

Keywords: polynomials, Smirnov-type inequality, Smirnov operator

For citation: Samsonov, I. A. Smirnov-Type Inequality for Polynomials with One Zero in the Left Half-Plane. *StudArctic Forum*. 2026, 11 (2): 85–96.

References

- Markov A.A. About one question of D.I. Mendeleev. *Proceedings of the Imperial Academy of Sciences*, 1889, Vol. 62, No. 4, pp. 1-24. (In Russ.)
- Markov A.A. *Selected works on the theory of continued fractions and the theory of functions least deviating from zero*. Moscow, Leningrad, OGIZ, State Publishing House of Technical Theoretical Literature, 1948, 412 p. (In Russ.)
- Markov V.A. *On functions that deviate least from zero in a given interval*. St. Petersburg, Imperial Academy of Sciences, 1892, 111 p. (In Russ.)
- Mendeleev D.I. *Investigation of aqueous solutions by specific gravity*. St. Petersburg, V. Demakov Publishing House, 1887, 312 p. (In Russ.)
- Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Constructive theory of functions of a complex variable*. Moscow, Nauka, 1964, 555 p. (In Russ.)
- Bernstein S. Sur la limitation des dérivées des polynômes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1930, Vol. 191, pp. 338-341.
- Kompaneets E.G., Starkov V.V., et al. On removing restrictions in the Bernstein theorem and its modifications. *Issues of Analysis*, 2025, Vol. 14(32), No. 3, pp. 23–43. DOI: 10.15393/j3.art.2025.19212
- Govil N.K., Mohaptra R., et al. Progress in approximation theory and applicable complex analysis. In memory of O.I. Rahman. *Springer Optimization and Its Applications*, 2017, Vol. 117, 519 p. DOI: 10.1007/978-3-319-49242-1
- Kompaneets E.G., Starkov V.V. On the Smirnov type inequality for polynomials. *Mathematical Notes*, 2022, Vol. 111, No. 3, pp. 388-397. DOI: 10.1134/S0001434622030063
- Kompaneets E.G., Zybina L.G. Smirnov and Bernstein type inequalities, taking into account higher-order coefficients and free terms of polynomials. *Issues of Analysis*, 2024, Vol. 13(31), No. 1, pp. 3-23. DOI: 10.15393/j3.art.2024.14270
- Mir M.Y., Shah W.M. Application of Gauss–Lucas theorem to the inequalities for polynomials. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2025, Vol. 58, No. 2, pp. 259-264. DOI: 10.1134/S1063454125700244
- Rashid R., Shah W.M. Generalized Bernstein-type inequalities for rational functions with restriction on zeros and poles. *The Journal of Analysis*, 2026, Vol. 34, pp. 75–86. DOI: 10.1007/s41478-025-00992-9
- Rather N.A., Wani N., et al. Integral mean estimate for polynomials with restricted zeros. *Issues of Analysis*, 2024, Vol. 13(31), No. 3, pp. 101-117. DOI: 10.15393/j3.art.2024.16050